



ANALYSIS:

Die Ableitung und ihre Anwendung im Kontext ganzrationaler Funktionen

- Änderung im Visier – der Weg zum Ableitungsbegriff
- Die Ableitungsfunktion
- Untersuchung ganzrationaler Funktionen mithilfe der Ableitung

von Monika Freudenberger und Jan Roth

I Änderung im Visier – Der Weg zum Ableitungsbegriff

Bestand und Änderung	2
ERGEBNISSICHERUNG: Bestand und Änderung	5
➔ ÜBEN: Der Unterschied zwischen Bestand und Änderung	6
Wie können wir die Änderung mit Graphen beschreiben? – Der „Steigungsgraph“	7
➔ WAS SIE SCHON KÖNNEN: Einnahmen und Ausgaben der Stadt Erlangen 2016	7
Notlandung eines Ultraleichtflugzeugs	8
Der Begriff der Änderungsrate	9
➔ ÜBEN: Flugbarogramm: Zur Erstellung eines Änderungs-/ Steigungsgraphen mithilfe des Bestandsgraphen	10
➔ ÜBEN: Aktienkurs der „Netflix“-Aktie	12
➔ ÜBEN: Glasklar?!	14
Wie können wir die Änderung rechnerisch beschreiben? – Die absolute Änderung und die mittlere Änderungsrate	16
ERGEBNISSICHERUNG: Absolute Änderung und mittlere Änderungsrate	19
➔ FÜR INTERESSIERTE: Konstante und veränderliche Änderungsraten	20
Ariane 5 – Teil II	21
➔ ÜBEN: 100m-Lauf bei der Leichtathletik-WM 2009 in Berlin	22
Vertiefung der mittleren Änderungsrate – Vom Sachkontext zur innermathematischen Betrachtung	24
➔ WAS SIE SCHON KÖNNEN: Skifahrer	24
➔ ÜBEN: Auf Beschleunigungskurs	25
➔ VERTIEFEN: Mittlere Änderungsraten bei Funktionen – es geht auch ohne Sachkontext!	27
➔ ÜBEN: Vermischte Übungen zur mittleren Änderungsrate	28
➔ ÜBEN <small>KOMPAKT</small> : Mittlere Änderungsraten im Kontext der Umkehrfunktion	30
ERGEBNISSICHERUNG: Der Grenzwert einer Zahlenfolge	32
➔ ÜBEN: Übungen zum Grenzwert von Folgen	33
Von der mittleren zur momentanen Änderungsrate Schritt 1: Verkleinerung des Intervalls	35
Von 0 auf 100?	35
ERGEBNISSICHERUNG: Die momentane Änderungsrate – Ein Näherungsverfahren	39
➔ ÜBEN: „Von der mittleren zur momentanen Änderungsrate“ Turmspringer – Teil 1	39

➔ **WAS SIE SCHON KÖNNEN**

Einnahmen und Ausgaben
der Stadt Erlangen 2016 S. 7

Skifahrer S. 24

➔ **ÜBEN**

Flugbarogramm:
Zur Erstellung eines Änderungs-/
Steigungsgraphen mithilfe
des Bestandsgraphen S. 10

Aktienkurs der „Netflix“-Aktie S. 12

Glasklar?! S. 14

100m-Lauf bei der Leicht-
athletik-WM 2009 in Berlin S. 22

Auf Beschleunigungskurs S. 25

Vermischte Übungen zur
mittleren Änderungsrate S. 28

Übungen zum Grenzwert
von Folgen S. 33

„Von der mittleren zur
momentanen Änderungsrate“
Turmspringer – Teil 1 S. 39

➔ **ÜBEN KOMPAKT**

Mittlere Änderungsraten
im Kontext der
Umkehrfunktion S. 30

➔ **FÜR INTERESSIERTE**

Konstante und veränderliche
Änderungsraten S. 20

➔ **VERTIEFEN**

Mittlere Änderungsraten
bei Funktionen – es geht
auch ohne Sachkontext! S. 27

Von der mittleren zur momentanen Änderungsrate	
Schritt 2: Der Grenzprozess	42
ERGEBNISSICHERUNG: Der Grenzprozess	42
Turmspringer – Teil 2	43
ERGEBNISSICHERUNG: Der Begriff der Ableitung	44
Turmspringer – Teil 3	
Berechnung weiterer Ableitungen mithilfe des Grenzwertes	45
Ableitung graphisch ermitteln	47
Turmspringer Teil 4 – graphische Lösung	47
ERGEBNISSICHERUNG: Der Begriff der Ableitung II	48
➔ ÜBEN: Die Ableitung als Tangentensteigung	50
➔ ÜBEN: Übungen zum Verständnis der Ableitung	52
➔ ÜBEN <small>KOMPAKT</small> : Gut getarnt?	54
Zusammenführung der verschiedenen Bedeutungen der Ableitung	57
➔ WAS SIE SCHON KÖNNEN: Rekapitulieren und Festigen	57
➔ ÜBEN: Bestand und Änderung in verschiedenen Sachkontexten: Welche Bedeutung kann die Ableitung haben?	58
➔ ÜBEN: Bedeutung der Ableitung im Überblick: Partnerarbeit	61
➔ ÜBEN <small>KOMPAKT</small> : Es geht auch komplizierter!	63
ERGEBNISSICHERUNG: Die Bedeutungen der Ableitung im Überblick	65
Bestimmung von Tangentengleichungen	66
➔ WAS SIE SCHON KÖNNEN: Ermittlung einer Geradengleichung	66
➔ ÜBEN: Tangentengleichungen ermitteln	67
➔ ÜBEN: Übungen zur Ermittlung von Tangentengleichungen	69
Bestimmung von Normalengleichung	74
Ermittlung der Normalengleichung	74
ERGEBNISSE SICHERN: Zusammenhang zwischen Tangenten- und Normalensteigung	76
➔ ÜBEN: Tangente, Normale und besondere Konstruktionen	77

➔ ÜBEN

Die Ableitung als Tangentensteigung	S. 50
Ableitung graphisch	S. 52
Bestand und Änderung in verschiedenen Sachkontexten: Welche Bedeutung kann die Ableitung haben?	S. 58
Bedeutung der Ableitung im Überblick: Partnerarbeit	S. 61
Tangentengleichungen ermitteln	S. 67
Übungen zur Ermittlung von Tangentengleichungen	S. 69
Tangente, Normale und besondere Konstruktionen	S. 77

➔ ÜBEN KOMPAKT

Gut getarnt?	S. 54
Es geht auch komplizierter!	S. 63

➔ WAS SIE SCHON KÖNNEN

Rekapitulieren und Festigen	S. 57
Ermittlung einer Geradengleichung	S. 66

II Rund um die Ableitungsfunktion

Die Ableitungsfunktion	82
ERGEBNISSICHERUNG: Die Ableitungsfunktion f'	84
Übungsaufgabe zur Ableitungsfunktion	84
➔ ÜBEN: Zusammenhang zwischen Ausgangsfunktion und Ableitungsfunktion: Eine Zuordnungsaufgabe	86
Ableiten – Gewusst wie! – Ableitungsregeln I: Die Potenzregel	90
➔ WAS SIE SCHON KÖNNEN: Wiederholung zur Ableitungsfunktion	90
Entdeckung der Ableitungsregel für Potenzfunktionen	91
ERGEBNISSICHERUNG: Die Potenzregel	91
➔ VERTIEFEN: Warum man beim Ableiten von $f(x) = x^3$ die Ableitung $f'(x) = 3x^2$ erhält	92
➔ FÜR INTERESSIERTE: Bestätigung der Gültigkeit der Potenzregel für allgemeine Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mittels Berechnung des Differentialquotienten	93
➔ ÜBEN: Übungen zur Potenzregel	94
Ableiten – Gewusst wie! – Ableitungsregeln II: Die Summenregel und die Faktorregel	96
➔ ÜBEN: Potenzregel üben: Ausgangs- und Ableitungsfunktionen ermitteln	96
Entdeckung der Summenregel	98
ERGEBNISSICHERUNG: Die Summenregel	100
➔ VERTIEFEN: Vertiefendes zur Summenregel	100
Entdeckung der Faktorregel	102
ERGEBNISSICHERUNG: Faktorregel	102
➔ VERTIEFEN: Begründung der Faktorregel	103
➔ ÜBEN: Übungsaufgaben zur Summen- und Faktorregel	104
Ableiten – Gewusst wie! – Ableitung weiterer Funktionen (Sinus- und Kosinusfunktion, Wurzelfunktion) und vermischte Übungen	106
➔ WAS SIE SCHON KÖNNEN: Die Graphen der Sinus-, Kosinus- und der Wurzelfunktion	106
Gruppenarbeit zur Ableitung weiterer Funktionen	107
ERGEBNISSICHERUNG: Die Ableitung von Sinus-, Kosinus- und Wurzelfunktion	111
➔ ÜBEN: Vermischte Übungen zu den Ableitungen weiterer Funktionen und den Ableitungsregeln	111
➔ VERTIEFEN: Vertiefendes zur Ableitung	119
➔ ÜBEN: Zusatztraining	121
Anwendung der Ableitungsregeln in Sachkontexten	122
➔ WAS SIE SCHON KÖNNEN: Absatzentwicklung bei Audi	122
➔ ÜBEN: Holz arbeitet!	124
➔ ÜBEN: Koffeinabbau bei Energy-Drinks	126

➔ ÜBEN

Zusammenhang zwischen Ausgangsfunktion und Ableitungsfunktion: Eine Zuordnungsaufgabe	S. 86
Übungen zur Potenzregel	S. 94
Ableiten – Gewusst wie! – Ableitungsregeln II: Die Summenregel und die Faktorregel	S. 96
Übungsaufgaben zur Summen- und Faktorregel	S. 104
Vermischte Übungen zu den Ableitungen weiterer Funktionen und den Ableitungsregeln	S. 111
Zusatztraining	S. 121
Holz arbeitet!	S. 124
Koffeinabbau bei Energy-Drinks	S. 126

➔ WAS SIE SCHON KÖNNEN

Wiederholung zur Ableitungsfunktion	S. 90
Die Graphen der Sinus-, Kosinus- und der Wurzelfunktion	S. 106
Absatzentwicklung bei Audi	S. 122

➔ VERTIEFEN

Warum erhalten wir beim Ableiten von $f(x) = x^3$ die Ableitungsfunktion $f'(x) = 3x^2$?	S. 27
Vertiefendes zur Summenregel	S. 100
Begründung der Faktorregel	S. 103
Vertiefendes zur Ableitung	S. 119

➔ FÜR INTERESSIERTE

Bestätigung der Gültigkeit der Potenzregel für allgemeine Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mittels Berechnung des Differentialquotienten	S. 93
---	-------



Ganzrationale Funktionen II – Ableitung im Kontext

Das Monotonieverhalten von Funktionen	132
Nutzungsverhalten von NDR 2: Monotonieverhalten von Funktionen	132
🔗 ÜBEN: Monotonie von Funktionen	137
Zusammenhang zwischen Ableitungsfunktion und Monotonie der Ausgangsfunktion – Der Weg zur Extremstellenberechnung	140
Weg zur Berechnung von Extremstellen mithilfe Monotoniecharakterisierung	140
ERGEBNISSICHERUNG: Lokale Extrema – Hochpunkte und Tiefpunkte	144
🔗 ÜBEN: Zusammenhang zwischen der Ableitungsfunktion und dem Monotonieverhalten der Ausgangsfunktion	145
Extremstellen rechnerisch bestimmen I – Methode: Vorzeichenwechsel der Ableitungsfunktion untersuchen	153
🔗 WAS SIE SCHON KÖNNEN: Einstieg zur Extremstellenberechnung	153
Verfahren zur exakten Berechnung von Extrempunkten	154
Extremstellen rechnerisch bestimmen II – Methode: Vorzeichen der 2. Ableitung untersuchen	160
Ableitungspuzzle	160
Bestimmung von Extrempunkten mithilfe der 2. Ableitung	162
🔗 ÜBEN: Übungen zur Extrempunktbestimmung mithilfe der 2. Ableitung	163
Bestimmung von Extremstellen und Co. in Sachkontexten	171
Die menschliche Kanonenkugel	171
Fruchtgummi	174
Medikamentenkonzentration	176
🔗 FÜR INTERESSIERTE: Der schiefe Wurf	178
Eigenschaften von Wendepunkten: Maximale bzw. minimale Steigung und Ort des Krümmungswechsels	180
Wo ist es am steilsten? – Wendepunkte von Funktionen	180
Weitere Eigenschaft von Wendepunkten: Ort des Krümmungswechsels von Graphen – Der Weg zur Wendepunktberechnung	184
ERGEBNISSICHERUNG: Zusammenhang zwischen Ausgangsfunktion und 2. Ableitungsfunktion	188
🔗 ÜBEN: Übungsaufgaben zu den Eigenschaften von Wendepunkten	188
Berechnung von Wendepunkten	195
🔗 WAS SIE SCHON KÖNNEN: Richtig oder falsch?	195
Bedingungen für das Vorliegen eines Wendepunktes	196
ERGEBNISSICHERUNG: Berechnung von Wendepunkten	197
🔗 ÜBEN: Übungsaufgaben zur Berechnung von Wendepunkten	198

🔗 ÜBEN

Monotonie von Funktionen	S. 137
Zusammenhang zwischen der Ableitungsfunktion und dem Monotonieverhalten der Ausgangsfunktion	S. 145
Übungen zur Extrempunktbestimmung mithilfe der 2. Ableitung	S. 163
Übungsaufgaben zu den Eigenschaften von Wendepunkten	S. 188
Übungsaufgaben zur Berech- nung von Wendepunkten	S. 198

🔗 WAS SIE SCHON KÖNNEN

Einstieg zur Extremstellenberechnung	S. 153
Richtig oder falsch?	S. 195

🔗 FÜR INTERESSIERTE

Der schiefe Wurf	S. 178
------------------	--------



Ganzrationale Funktionen II – Ableitung im Kontext

Funktionsuntersuchungen mithilfe der Ableitung – im Sachkontext und innermathematisch (optional) 202

➔ WAS SIE SCHON KÖNNEN: Zielpunkte und Orientierung auf
der mathematischen Landkarte: Ein roter Faden 202

➔ VERTIEFEN: Funktionsuntersuchung im Überblick –
im Sachkontext und innermathematisch 202

ERGEBNISSICHERUNG:
Übersicht: Zusammenhang zwischen einer Funktion
und ihren Ableitungen 207

➔ ÜBEN: Funktionsuntersuchungen mithilfe der Ableitung –
Was haben Sie bisher gelernt? 208

Optimierungsprobleme I 210

Gartengestaltung nach Maß 210

➔ ÜBEN: Übungen zu Optimierungsaufgaben 214

Optimierungsprobleme II 217

Ein Fahrplan für Optimierungsprobleme 217

➔ VERTIEFEN: Gaunerjagd 218

Hilfe zu Schülerarbeitsbuch S. 218, „Gaunerjagd“,
Teilaufgabe 1 221

Verkehrsstau – Optimierung des Fassungsvermögens einer Straße 222

Die Berechnung des Anhalteweges bei Bremsvorgängen 222

➔ VERTIEFEN: Optimierung des Fassungsvermögens
einer Straße 224

ERGEBNISSICHERUNG:
Der Modellierungskreislauf 226

KLAUSURVORBEREITUNG ZUM BAUSTEIN I 228

KLAUSURVORBEREITUNG ZUM BAUSTEIN II 232

KLAUSURVORBEREITUNG ZUM BAUSTEIN III 234

➔ ÜBEN

Funktionsuntersuchungen
mithilfe der Ableitung – Was
haben Sie bisher gelernt? S. 208

Übungen zu Optimierungsaufgaben S. 214

➔ WAS SIE SCHON KÖNNEN

Zielpunkte und Orientierung
auf der mathematischen
Landkarte: Ein roter Faden S. 202

➔ VERTIEFEN

Funktionsuntersuchung im
Überblick – im Sachkontext
und innermathematisch S. 202

Gaunerjagd S. 218

Optimierung des
Fassungsvermögens
einer Straße S. 224

ANHANG:



zu Baustein I:

Änderung im Visier – Der Weg zum Ableitungsbegriff 239–242